ـــحبـــة الطــالب
05.39.80.71.67
attalibtib@gmail.com

N° 50
: 3 DH

S III

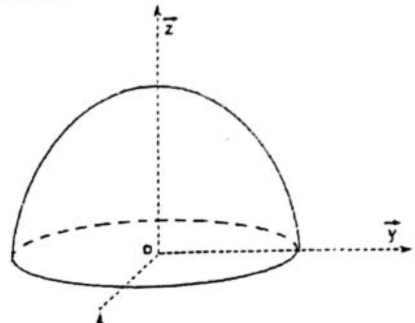
Université Mohamed Premier
École Nationale des Sciences Appliquées
Al-Hoceima - Maroc

Année Universitaire 2016-2017
2ème année du Cycle préparatoire (S3)
Responsable du module : P. Chaabelasri

TD de Mécanique du solide
(~~Cinématique~~) Inertie

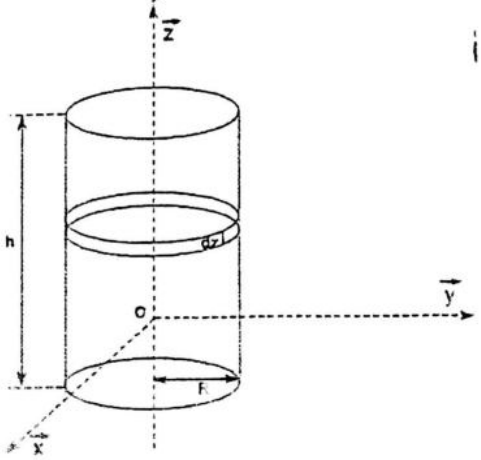
Exercice 1:

Déterminer la position du centre d'inertie d'une demie sphère homogène de rayon R et de masse **m**.



Exercice 2

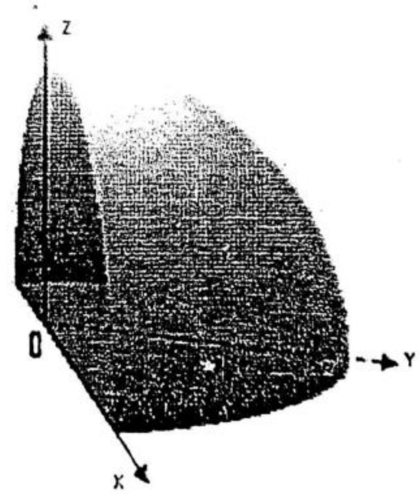
Déterminer la matrice d'inertie d'un cylindre homogène de masse **m** de hauteur **h** base de rayon **R**.



Exercice 3

Dans un repère orthonormé directe $\Re(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un quart de sphère homogène (S), de centre O, de masse volumique et de rayon R.

1- Déterminer la masse de (S).
2- Déterminer la position de son centre d'inétrie.
3- Déterminer en O la matrice d'inertie de (S), dans la base de $\Re$.
4- Déterminer en G la matrice d'inertie de (S), dans la base de $\Re(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.



Exercice 4

Un solide (S) homogène de masse m est constitué par un cylindre plein de hauteur H, de rayon R et par une demi sphère pleine de rayon R. le cylindre et la demi sphère sont assemblés par une soudure comme l'indique la figure.

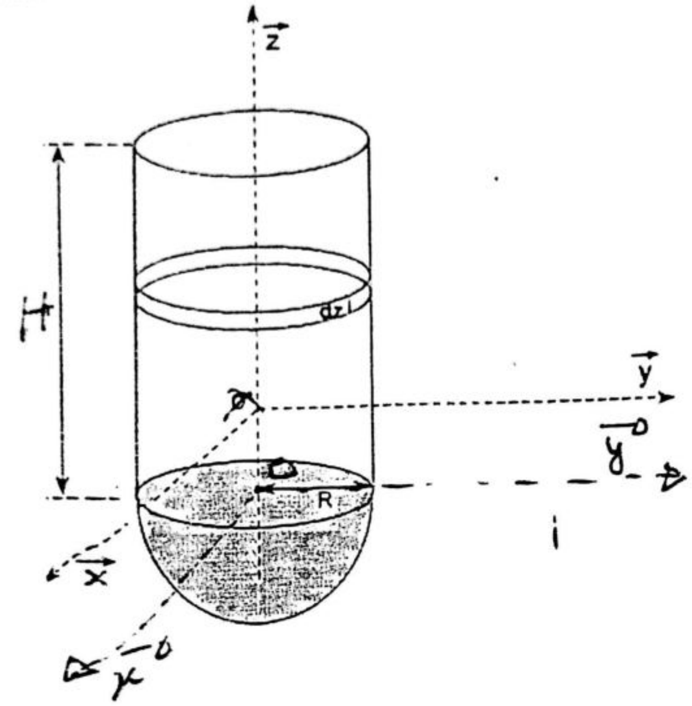
1- Expliquer pourquoi le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est principal d'inertie ?
2- Déterminer la position du centre d'inertie G du solide.
3- Déterminer la matrice d'inertie en O, relativement à la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Exe
S
e

Scanned by CamScanner

ـــلـتبـ ـ
:0.71.67
)gmail.com

4- En déduire, dans la même base la matrice principale d'inertie du solide.



Exercice 5

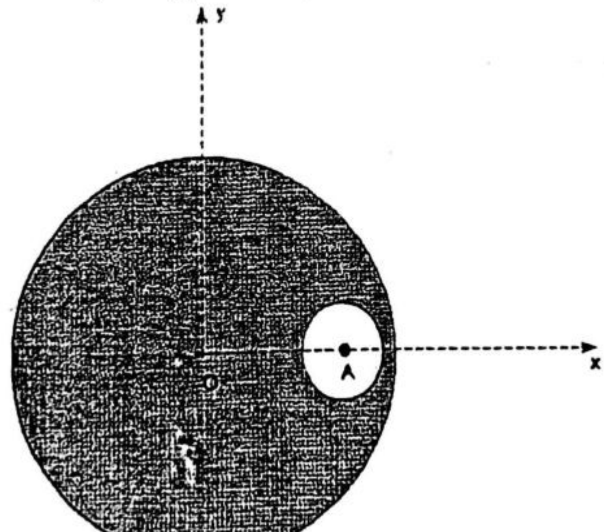
Soit une structure de masse **m** et rayon **R**. Il comporte un trou circulaire centré en A (OA = a) et de rayon **r**

1- Déterminer la position du centre d'inertie G de la structure.

2- Déterminer la matrice d'inertie en O.

3- En déduire la matrice d'inertie au centre d'inertie G.

4- Calculer son moment d'inertie par rapport à la première bissectrice.



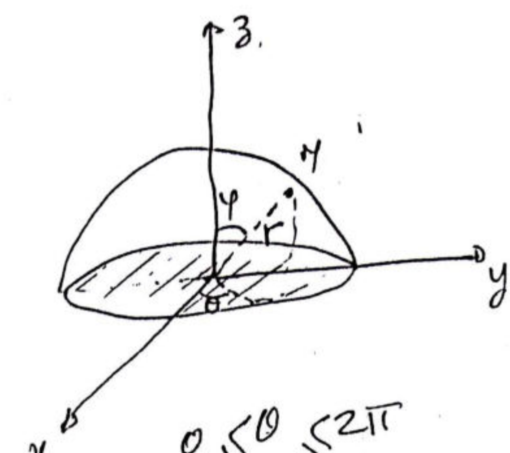
Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} 2\sin^2\varphi = 1 - \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \\ \cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

serie 3 : Inertie des solides

Ex 1 Demi-sphère :



$dv = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$0 \leq r \leq R$

- La masse totale du solide :

$dm = \rho \, dv$ (avec ρ constante)

$$m = \int_V dm = \iiint \rho \, dv = \rho \iiint r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$m = \rho \int_0^R r^2 dr \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \, d\varphi}_{1} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \rho \, \frac{1}{3} R^3 . 2\pi \Rightarrow \boxed{m = \rho \frac{2}{3} \pi R^3 = \rho \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3\right)}$$

- Centre d'inertie :

$(O\vec{z})$ est un axe de symetrie, donc $G \in (O\vec{z})$, alors $x_G = 0$ et $y_G = 0$.

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_V \vec{OM} \, dm$$

$$z_G = \frac{1}{m} \int z \, dm$$

$$= \frac{1}{V} \int z \, dv \Rightarrow z_G = \frac{1}{V} \int r\cos\varphi . r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Scanned by CamScanner

$$x_G = \frac{1}{V}\int_0 \underbrace{\int_0 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi}_{-\frac{\cos^2\varphi}{2}} \int_0 d\theta$$

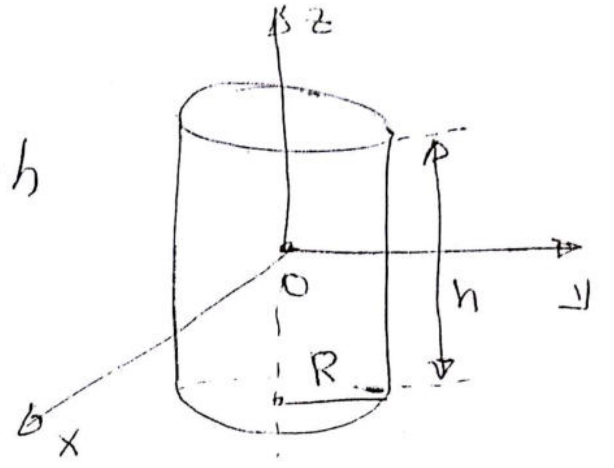
$$= \frac{1}{V}\cdot\frac{1}{4}R^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{3}{2\pi R^3}\cdot\frac{1}{4}R^4\pi$$

$$\boxed{x_G = \frac{3}{8}R}$$

EX 2

A/ Cylindre de Rayon R et hauteur h

Plein



• La masse du cylindre :

$dm = \rho\, dV \Rightarrow dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ avec

$$m = \int_{(V)} dm \qquad 0 \leq r \leq R$$

$$= \int_{(V)} \rho\, dV \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-h/2 \leq z \leq h/2$$

$$= \int \rho\, r\,dr\,d\theta\,dz \Rightarrow m = \rho\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_{-h/2}^{h/2} dz$$

$$m = \rho\,\frac{R^2}{2}\cdot 2\pi\cdot h$$

$$\boxed{m = \rho\,\pi R^2 h}$$

• Coordonnées cartesiennes en fct des coordonnées cylindr

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

La matrice d'inertie : $M^{(S)}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Les axes $(O\vec{x})$, $(O\vec{y})$ et $(O\vec{z})$ sont des axes de symetries materiels. donc $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$

$$M^{(S)}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

• I_{xx}

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\, dm$$

$$= \int_{(S)} (r^2 \sin^2\theta)\, \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz + \int_{(S)} z^2 \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \rho \left\{ \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz + \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \right\}$$

$$= \rho \left\{ \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\, d\theta \left[z \right]_{-h/2}^{h/2} + \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{-h/2}^{h/2} \right\}$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \left\{ \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \cdot h + \frac{R^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{3} \frac{2}{8} h^3 \right\}$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \left\{ \frac{\pi R^4 h}{4} + \frac{\pi R^2 h^3}{12} \right\}$$

$$I_{xx} = \frac{m R^2}{4} + \frac{h^2}{12}$$

• I_{yy} : se calcul de la m maniere :

$$I_{yy} = \frac{m R^2}{4} + \frac{h^2}{12}$$

Scanned by CamScanner

$\underline{I_{33}}$ $\quad I_{33} = \int_{(v)} (x^2+y^2)\, dm$ (4

$$= \rho \int (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \frac{1}{2} R^4 \pi h$$

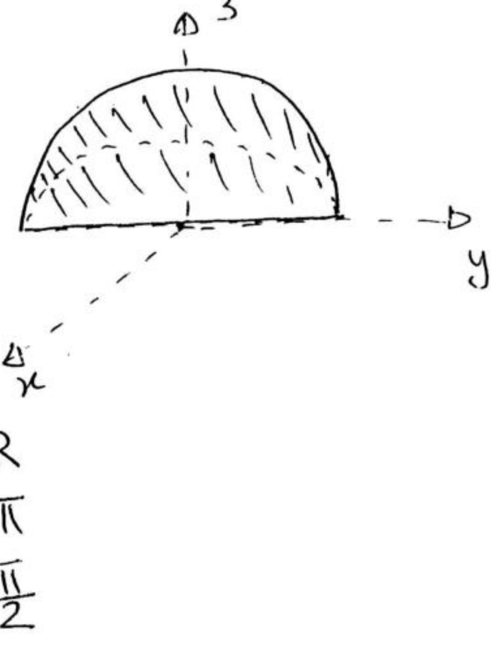
$$\boxed{I_{33} = \frac{mR^2}{2}}$$

Finalement :

$$M^{(S)}_{(O,\bar{x},\bar{y},\bar{z})} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$$

EX3

un quart de sphère homogène



- coordonnées cartesiennes en f^{ct} des coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1/ La masse :

$$dm = \rho\, dV = \rho r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

$$m = \int_V dm = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin\varphi\, d\varphi}_{-\cos\varphi} \int_0^{\pi} d\theta$$

$$= \rho\, \frac{R^3}{3} \cdot 1 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \rho \frac{\pi R^3}{3}}$$

Scanned by CamScanner

2/ Position du centre d'inertie

Le plan $(P) \in (O, \vec{y}, \vec{z})$ est un plan de symetrie materiel, donc $G \in (P) \Rightarrow x_G = 0$

- $y_G = \frac{1}{m} \int y \, dm$ / $y = r \sin\varphi \sin\theta$, $dm = \rho \, r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$

$$= \frac{1}{m} \int r \sin\varphi \sin\theta \, \rho \, r^2 \sin\varphi \, \underline{dr \, d\theta \, d\varphi}$$

$\underline{2\sin^2\varphi = 1 - \cos}$

$$= \frac{1}{V} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{V} \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi R^3} \left[\frac{R^4}{4}\right] \cdot \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi R^3} \frac{R^4}{4} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{2}\right] \cdot \left[\cancel{2}\right]$$

$$= \frac{3\pi R^4}{8 \pi R^3}$$

$$\boxed{y_G = \frac{3}{8} R}$$

- $z_G = \frac{1}{m} \int z \, dm$ / $z = r \cos\varphi$, $dm = \rho \, r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$

$$= \frac{1}{V} \int r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{3}{\pi R^3} \int_0^R r^3 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \int_0^{\pi} d\theta$$

Scanned by CamScanner

$$z_G = \frac{3}{\pi R^3} \frac{R^4}{4} \left[\frac{1}{2} \sin\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi R^3} \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$\boxed{z_G = \frac{3}{8} R}$$

Donc $\vec{OG} = \frac{3}{8} R (\vec{y} + \vec{z})$

3/ Matrice d'inertie $M^{(S)}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$:

Nous avons le plan $x = 0$ est un plan de symétrie, alors tous les produits d'inertie relatifs à x sont nuls :

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yx} = I_{zx} = 0$$

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} M R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} M R^2 & -\frac{2}{5\pi} M R^2 \\ 0 & -\frac{2}{5\pi} M R^2 & \frac{2}{5} M R^2 \end{pmatrix}$$

...uple :

Formules à utiliser

$$\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$
$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$
$$\sin(2\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$
$$2\sin^2\varphi = 1 - \cos(2\varphi)$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$= \rho \int (r^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + r^2 \cos^2\varphi) r^2 \sin\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \rho \int \Big[r^4 \underbrace{\sin^3\varphi \sin^2\theta}_{I} + r^4 \underbrace{\cos^2\varphi \sin\varphi}_{II} \Big] dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$I = \iint \sin^3\varphi \sin^2\theta \, d\varphi\, d\theta$$

$$= \iint \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)\, d\varphi \cdot \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[-3\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{9}{3} - \frac{1}{3}\right\} \cdot \frac{1}{2}\left\{\pi\right\} = \frac{1}{3}\pi$$

Scanned by CamScanner

$$\mathrm{II} = \int \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi d\theta$$
$$= \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\theta\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\pi$$

Donc :

$$I_{xx} = \rho \frac{R^5}{5}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3m}{\pi R^3} \cdot \frac{2}{15}\pi R^5$$

$$\boxed{I_{xx} = \frac{2}{5} R^2 m}$$

$$I_{yz} = -\int yz \, dm = -\rho\int yz \, dV$$
$$= -\rho \int r^2 \sin\varphi\cos\varphi \sin\theta \cdot r^2 \sin\varphi \, dr d\theta d\varphi$$
$$= -\rho \int r^4 \sin^2\varphi \cos\varphi \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$$
$$= -\frac{3m}{\pi R^3} \frac{R^5}{5} \frac{1}{3}\left[\sin^3\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$
$$= -\frac{\cancel{3}m}{\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \frac{1}{\cancel{3}} \cdot (1-0) \cdot \underbrace{\left(-(-1-1)\right)}_{2}$$

$$\boxed{I_{yz} = -\frac{2}{5}\frac{mR^2}{\pi}}$$

EX 4

~~1/ Les deux plans (oxz) et (oyz) sont des plans de symetrie et $(\vec{ox}) \wedge (\vec{oy}) = \vec{oz}$ donc les axes (ox) et (oy) sont perpondiculair et $(\vec{ox}), (\vec{oy})$ sont principaux d'inertie~~

1/ • Les deux plans $(\vec{oxz})$ et (oyz) sont deux plans de symetri materiells $\Rightarrow \forall$ axe $\in$ au plan de symetri est un axe principali d'inertie $\Rightarrow (\vec{ox})$ et $(\vec{oy})$ sont deux axes principaux d'inertie

• $(\vec{oz})$ axe de symetri materiel $\Rightarrow (\vec{oz})$ axe principal d'inertie

$(\vec{ox}) \wedge (\vec{oy}) = \vec{oz}$ donc $((\vec{ox}), \vec{oy}, \vec{oz})$ est une base

$O/(O,x,y,z)$ [illegible] principal d'inerti

Scanned by CamScanner

D'après l'Ex 1 :

$G_s(0,0,-\frac{3}{8}R)$; $G_c(0,0,H/2)$

$m_s = \rho\frac{2}{3}\pi R^3$; $m_c = \rho\pi R^2 H$

$\vec{OG} = \frac{1}{\sum m_i}\sum m_i\vec{OG_i} \Rightarrow OG = \frac{1}{m}(m_s\vec{OG_s} + m_c\vec{OG_c})$

$\vec{OG} = \frac{H/2}{1+\frac{m_s}{m_c}} - \frac{3R/8}{1+\frac{m_c}{m_s}}$

$\frac{m_c}{m_s} = \frac{\pi R^2 H}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2}\frac{H}{R}$

$\frac{m_s}{m_c} = \frac{2R}{3H}$

$= \frac{H/2}{1+\frac{2R}{3H}} - \frac{3R/8}{1+\frac{3H}{2R}}$

$= \frac{H/2}{\frac{3H+2R}{3H}} - \frac{3R/8}{\frac{3H+2R}{2R}}$

$= \frac{\frac{3H^2}{2}}{3H+2R} - \frac{\frac{3}{4}R^2}{3H+2R}$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{3}{4}\left(\frac{2H^2-R^2}{3H+2R}\right)\vec{z}}$$

3/ $M^{s}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = M^{sph}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} + M^{cyl}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

$M^{(S)}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

$A \equiv \frac{3M}{3H+2R}\left(\frac{HR^2}{4} + \frac{4R^3}{15} + \frac{H^3}{3}\right)$

$C \equiv \frac{3M}{3H+2R}\left(\frac{HR^2}{2} + \frac{4R^3}{15}\right)$

Scanned by CamScanner

4/ $M^{S}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = M_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} + M^{G,m}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

- $M^{G,m}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \begin{pmatrix} m(y_G^2+z_G^2) & 0 & 0 \\ 0 & m(x_G^2+z_G^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(x_G^2+y_G^2) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad X = m z_G^2 = m \left\{ \frac{3}{2} \frac{(H^2 - \frac{1}{2}R^2)}{3H+2R} \right\}^2$$

$M^{S}_{(G,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = M^{S}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})} - M^{G,m}_{(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

$$= \begin{pmatrix} A-X & 0 & 0 \\ 0 & A-X & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner